1.2 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

1.2.1 จำนวนเชิงซ้อน

การเขียนจำนวนเชิงซ้อน เขียนได้ 2 รูปแบบ ดังนี้

1. **รูปคู่อันดับ** $z = (a,b)$ เมื่อ $a,b \in R$
2. **รูปแบบมาตรฐาน** $z = a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $(a,b) = a+bi$

การเรียกชื่อส่วนต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน

เรียก a เรียกว่า **ส่วนจริง** (Real Part) เขียนแทนด้วย $\mathrm{Re}(z)$ และ

เรียก b เรียกว่า **ส่วนจินตภาพ** (Imaginary Part) เขียนแทนด้วย $\mathrm{Im}(z)$

จำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ เมื่อ $b \neq 0$ เรียกว่า **จำนวนจินตภาพ** (Imaginary Number)

จำนวนเชิงซ้อน bi เมื่อ $b \neq 0$ เรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้** (Pure Imaginary Number)

เช่น

$(1,2) = 1+2i$ จะได้ $\mathrm{Re}(z) = 1$ และ $\mathrm{Im}(z) = 2$

$(4,-3) = 4-3i$ จะได้ $\mathrm{Re}(z) = 4$ และ $\mathrm{Im}(z) = -3$

$(-1,5) = -1+5i$ จะได้ $\mathrm{Re}(z) = -1$ และ $\mathrm{Im}(z) = 5$

1.2.1 การเปรียบเทียบกันของจำนวนเชิงซ้อน

การเปรียบเทียบในเชิงมากกว่าหรือน้อยกว่าของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนจินตภาพและจำนวนจินตภาพแท้ ไม่สามารถนำมาเปรียบกันได้ในเชิงมากกว่าหรือน้อยกว่า

เช่น 3i , 2 - 5i, -7i , i , $-6+i$

จำนวนทั้ง 5 นี้ไม่สามารถบอกได้ว่าจำนวนใดมีค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุด หรือจำนวนใดมีค่ามากกว่าจำนวนใด **เนื่องจากจำนวนที่มี i ติดอยู่ ไม่ได้ถูกกำหนดให้มีในระบบอสมการ**

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$ แล้ว $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

ตัวอย่าง 1 จงหาจำนวนจริง a และ b ที่ทำให้ $2a-3bi = 4+6i$

วิธีทำ จาก $2a-3bi = 4+6i$

จะได้ $2a = 4$ และ $-3b = 6$

$\therefore$ $a = 2$ และ $b = -2$

1.2.2 การบวกและการลบจำนวนเชิงซ้อน

การบวกจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม

ถ้า จำนวนเชิงซ้อน $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$ แล้ว

$$z_1 + z_2 = (a+c)+(b+d)i$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ

1. $(2+3i)+(6-2i)$
2. $(3+2i)+(1-3i)$
3. $(1+i)+(2i+2)+7i$

วิธีทำ

1. $(2+3i)+(6-2i) = (2+6)+(3-2)i$

$= 8+i$

2. $(3+2i)+(1-3i) = (3+1)+(2-3)i$

$= 4-i$

การลบจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม

จำนวนเชิงซ้อน z_1 ลบด้วย z_2 ทุกคู่มีได้และเขียนแทนด้วย $z_1 - z_2$

ซึ่ง $z_1 - z_2 = (a-c)+(b-d)i$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ

1. $(2+i)-(4-2i)$
2. $(5-3i)-(7+i)$

วิธีทำ

1. $(2+i)-(4-2i) = (2-4)+(1-(-2))i$

$$= -2+3i$$

2. $(5-3i)-(7+i) = (5-7)+(-3-1)i$

$$= -2-4i$$

1.2.2 การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อน

1) การคูณจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ถ้า จำนวนเชิงซ้อน $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$ แล้ว

$$z_1z_2 = (a+bi)(c+di)$$
$$= ac+adi+bci+bdi^2$$
$$= ac+adi+bci-bd$$
$$= (ac-bd)+(ad+bc)i$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ

1. $(3-2i)(4+i)$
2. $(5-i)(5+i)$
3. $(2+2i)(3+i)(1+i)$
4. $i(1+i)(2-i)$

วิธีทำ

1. $(3-2i)(4+i) = 12+3i-8i-2i^2$

$$= 12+3i-8i+2$$
$$= 14-5i$$

2. $(5-i)(5+i) = 25+5i-5i-i^2$

$$= 25+1$$
$$= 26$$

3. $(2+2i)(3+i)(1+i) = (6+2i+6i+2i^2)(1+i)$

$$= (4+8i)(1+i)$$
$$= 4+4i+8+8i^2$$
$$= 4+4i+8i-8$$
$$= -4+12i$$

3. $i(1+i)(2-i) = i(2-i+2i-i^2)$

$= i(2-i+2i+1)$

$= i(3+i)$

$= 3i+i^2$

$= -1+3i$

สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. สมบัติการสลับที่

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

3. สมบัติการแจกแจง

$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

4. $\underbrace{zzz\ldots z}_{n \text{ ตัว}} = z^n$

ข้อควรจำ ถ้า (a,b) เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เท่ากับ $(0,0)$

ตัวผกผันหรืออินเวอร์สของ (a,b) คือ จำนวนเชิงซ้อนที่คูณกับ (a,b) แล้วได้ $(1,0)$ นั่นคืออินเวอร์สของ $(a,b) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

อินเวอร์สของ z เขียนแทนด้วย z^{-1}

ดังนั้น ถ้า $z = (a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว อินเวอร์สของ z เขียนแทนด้วย z^{-1} และ

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

ตัวอย่าง 5 จงหาอินเวอร์สการคูณของ $z = 3+4i$

วิธีทำ จาก $z = 3+4i$ จะได้อินเวอร์สของ z คือ

$$z^{-1} = \frac{3}{3^2+4^2} - \frac{4i}{3^2+4^2}$$
$$= \frac{3}{9+16} - \frac{4i}{9+16}$$
$$= \frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$$

ตัวอย่าง 6 จงหาอินเวอร์สการคูณของ $Z = 3-2i$

วิธีทำ จาก $Z = 3-2i$ จะได้อินเวอร์สของ Z คือ

$$z^{-1} = \frac{3}{3^2+2^2} + \frac{2i}{3^2+2^2}$$
$$= \frac{3}{9+4} + \frac{2i}{9+4}$$
$$= \frac{3}{13} + \frac{2i}{13}$$

2) การหารจำนวนเชิงซ้อน

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม

ให้ $z = a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เรียกจำนวนเชิงซ้อน $a-bi$ ว่าเป็นสังยุค (Conjugate) ของ Z และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ นั่นคือ

$$\bar{z} = \overline{a+bi} = a-bi$$

สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้

1. $\overline{z_1+z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
2. $\overline{z_1-z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$
3. $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z_1} \times \bar{z_2}$

4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5. $\overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}$

6. $\overline{\overline{z}} = z$

7. ถ้า z เป็นจำนวนจริงแล้ว $\overline{z} = z$

8. ถ้า z เป็นจำนวนจินตภาพแท้แล้ว $\overline{z} = -z$

9. $z \times \overline{z}$ เป็นจำนวนจริงเสมอ ซึ่ง

$$z \times \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \in R$$

การหารจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม

1. ให้จำนวนเชิงซ้อน z_1 หารด้วย z_2 เมื่อ $z_2 \neq 0$ สามารถหารกันได้เสมอ และเขียนแทนด้วย $z_1 \div z_2$ หรือ $\dfrac{z_1}{z_2}$

2. $\dfrac{z_1}{z_2}$ ยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = a + bi$ แล้ว

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$$

นำ Conjugate ของ $c + di$ คูณทั้งเศษและส่วน จะได้

$$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}$$

$$= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2 + d^2}$$

สิ่งที่ควรทราบจากบทนิยาม

กำหนดให้ z_1 , z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = z$

2. ถ้า $z_1 \neq 0$ และ $z_2 \neq 0$ แล้ว

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \bullet \frac{1}{z_2}$$

3. $\dfrac{1}{z_1} \pm \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_2 \pm z_1}{z_1 z_2}$

ตัวอย่าง 7 จงหาค่าของ $\dfrac{3-5i}{2+3i}$

วิธีทำ จาก $\dfrac{3-5i}{2+3i}$ จะได้ $\dfrac{3-5i}{2+3i} \times \dfrac{2-3i}{2-3i}$

$$= \frac{(3-5i)(2-3i)}{4+9}$$

$$= \frac{6-9i-10i-15}{4+9}$$

$$= \frac{-9-19i}{13}$$

$$= \frac{-9}{13} - \frac{19i}{13}$$

ตัวอย่าง 8 จงหาค่าของ Z จากสมการ $z(2+3i) = -1-2i$

วิธีทำ จาก $z(2+3i) = -1-2i$ จะได้ $z = \dfrac{-1-2i}{2+3i}$

$$= \frac{-1-2i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i}$$

$$= \frac{(-1-2i)(2-3i)}{4+9}$$

$$= \frac{-1+3i-4i-6}{4+9}$$

$$= \frac{-7-i}{13}$$

$$= -\frac{7}{13} - \frac{i}{13}$$

ตัวอย่าง 9 จงหาค่าของ x และ y จากสมการ $\frac{-5+2i}{x+yi} = \frac{-17}{10} + \frac{i}{10}$

วิธีทำ จาก $\frac{-5+2i}{x+yi} = \frac{-17}{10} + \frac{i}{10}$ จะได้ $x+yi = \frac{10(-5+2i)}{-17+i}$

$$= \frac{(-50+20i)(-17-i)}{(-17+i)(-17-i)}$$

$$= \frac{850+50i-340i+20}{289+1}$$

$$= \frac{870+290i}{290}$$

$$= 3+i$$

ดังนั้น $x = 3$ และ $y = 1$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $x+yi$ เมื่อ $x, y \in R$

   1) $(4+i)^2$ = ...

   2) $(2-2i)^2$ = ...

   3) $(3+2i)(2+4i)$ = ...

   4) $(-1-i)^2$ = ...

   5) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)$ = ...

   6) $(5-2i)(-2+3i)$ = ...

2. กำหนดให้ $z_1 = 2-i$ และ $z_2 = -3+2i$ จงหา

1) $\overline{z_1}$ = ... 2) $\overline{z_2}$ = ...

3) z_1z_2 = ... 4) $\overline{z_1z_2}$ = ...

5) $\overline{z_1} \times \overline{z_2}$ = ... 6) z_1+z_2 = ...

7) $\overline{z_1+z_2}$ = ... 8) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ = ...

3. ถ้า $z = 2-4i$ จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $x+yi$ เมื่อ $x,y \in R$

1) $\overline{z}$ = ...

2) $z\overline{z}$ = ...

3) $z+\overline{z}$ = ...

4) $z(z+\overline{z})$ = ...

5) $z-\overline{z}$ = ...

6) $(z-\overline{z})i$ = ...

7) z^{-1} = ...

8) $\frac{z}{i}$ = ...

4. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $x+yi$ เมื่อ $x,y \in R$

1) $\frac{2-i}{4+i}$

....

....

....

....

2) $\frac{3+2i}{2-3i}$

....

....

....

....

3) $\dfrac{4 + 3i}{1 + i}$

....

....

....

....

4) $\dfrac{2 - 2i}{4i}$

....

....

....

....

5) $\dfrac{1}{2 - 3i}$

....

....

....

....

6) $\dfrac{i}{2 + 6i}$

....

....

....

....

7) $\dfrac{6 + 3i}{2 + 4i}$

....

....

....

....

8) $\dfrac{6 - 5i}{3 + 4i}$

....

....

....

....

5. จงหาจำนวนจริง a และ b ที่ทำให้ $(a+bi)(2+5i) = 3-i$

....

....

....

....

6. กำหนดให้ $f(z) = z^2+2z+3$ จงหาค่าของ $f(1+i)$

....

....

....

....

7. จงหาค่าของ $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{25}$

....

....

....

....

8. จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $(2-i)z = 4+2i$

....

....

....

....

2) $(3-i)z = 6-7i$

....

....

....

....

3) $(1+3i)z = -2-i$

....

....

....

....

4) $(5+3i)z = 1+i$

....

....

....

....

5) $2(4-7i)z = 5+2i$

....

....

....

....

6) $(2+i)z + i = 3$

....

....

....

....

9. ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $(x+yi)(2-3i) = 5+3i$
จงหาค่าของ $x+y$

....

....

....

....

10. กำหนดให้ $z = i^9 + i^{10} + \ldots + i^{126}$ จงหาค่าของ $2z^{-1}$

....

....

....

....