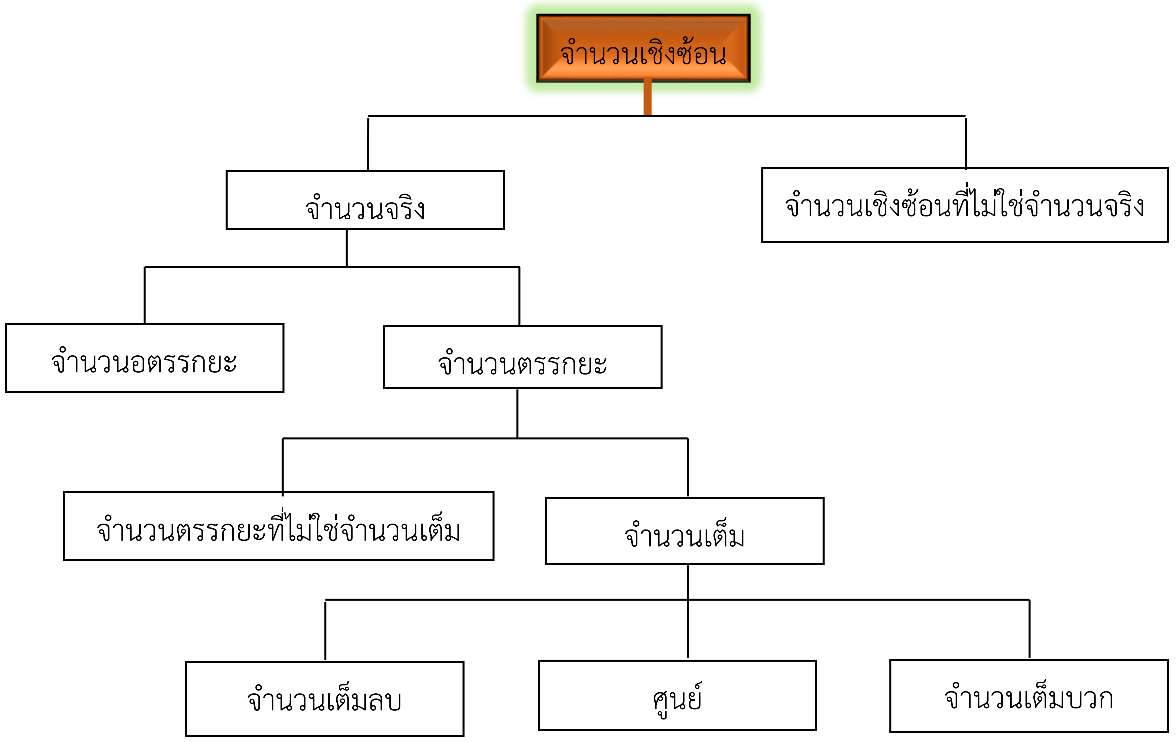
บทที่ 1
จำนวนเชิงซ้อน
(Complax Number)

1.1 จำนวนจินตภาพ

ในระบบจำนวนจริง สมการบางสมการไม่มีคำตอบ เช่น $x^2+1=0,\ x^4+4=0$ เพื่อแก้ปัญหา จึงต้องสร้างระบบจำนวนขึ้นมาใหม่เพื่อให้สมการดังกล่าวมีคำตอบ เรียกจำนวนที่สร้างใหม่นี้ว่า **จำนวนเชิงซ้อน**

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่าง ๆ



จำนวนจินตภาพแท้ (Pure Imaginary Number)

เรียก $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}$ หรือจำนวนลบที่อยู่ในเครื่องหมายรากที่สองว่า “จำนวนจินตภาพ” และเรียก $\sqrt{-1}$ ว่า หนึ่งหน่วยจินตภาพ และเขียนแทนด้วย i ดังนั้น $i=\sqrt{-1}$

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

   $\sqrt{-a}$ **จะถูกเรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้ (Pure Imaginary Number)**

2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$

เช่น
$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-5} = \sqrt{5}\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1}$$

กำหนดให้ $\sqrt{-1}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ i

เช่น
$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i$$
$$\sqrt{-5} = \sqrt{5}\sqrt{-1} = \sqrt{5}\,i$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3i$$

4. เมื่อ i ถูกยกกำลัง จะได้ดังนี้

4.1 $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = -1$

นั่นคือ
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\,i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = (1)(i) = i$$
$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1)(-1) = -1$$
$$i^9 = (i^4)^2 \cdot i = (1)^2(i) = i$$

ตัวอย่าง 1
$$\sqrt{-9}\,\sqrt{-7} = 3i(\sqrt{7}i) = 3\sqrt{7}i^2 = -3\sqrt{7}$$
$$\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = \sqrt{3}i(\sqrt{7}i) = \sqrt{21}i^2 = -\sqrt{21}$$
$$\sqrt{-9}\,\sqrt{-4} = 3i(2i) = 6i^2 = -6$$

ข้อควรรู้เกี่ยวกับ Pure Imaginary Number ที่ถูกยกกำลัง

ค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$i = \sqrt{-1}$	$i^2 = -1$
$i^3 = -i$	$i^4 = (i^2)(i^2) = (-1)(-1) = 1$
$i^5 = i$	$i^6 = -1$
$i^7 = -i$	$i^8 = 1$
$\vdots$	$\vdots$

$$\therefore \quad i^n = \begin{cases} i & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนที่หารด้วย 4 แล้วเศษ 1} \\ -1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนที่หารด้วย 4 แล้วเศษ 2} \\ -i & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนที่หารด้วย 4 แล้วเศษ 3} \\ 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว} \end{cases}$$

ข้อควรจำเกี่ยวกับ Operation ของ Pure Imaginary Number

1. ผลบวกของ Pure Imaginary Number

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$$

$$i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} = (-i) + 1 + i + (-1) = 0$$

$$i^{102} + i^{103} + i^{104} + i^{105} = (-1) + (-i) + 1 + i = 0$$

แสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$$

นั่นคือ ถ้า i มีกำลังเรียงกันครบเป็น 4 ชุด แล้ว ผลบวกของมันจะเท่ากับ 0 เสมอ

2. ผลคูณของ Pure Imaginary Number

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 = (i)(-1)(-i)(1) = -1$$

$$i^7 \cdot i^8 \cdot i^9 \cdot i^{10} = (-i)(1)(i)(-1) = -1$$

$$i^{102} \cdot i^{103} \cdot i^{104} \cdot i^{105} = (-1)(-i)(1)(i) = -1$$

แสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$i^n \cdot i^{n+1} \cdot i^{n+2} \cdot i^{n+3} = -1$$

นั่นคือ ถ้า i มีกำลังเรียงกันครบเป็น 4 ชุด แล้ว ผลคูณของมันจะเท่ากับ -1 เสมอ

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $i^{23}, \ i^{25}, \ i^{56}, \ i^{99}, \ i^{106}, \ i^{2021}, \ i^{2563}$

วิธีทำ

$i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = (1)i^3 = -i$ (23 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3)

$i^{25} = i^{24} \cdot i = (1)i = i$ (25 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1)

$i^{56} = i^{56} \cdot i^0 = 1$ (56 หารด้วย 4 ลงตัว)

$i^{99} = i^{96} \cdot i^3 = (1) \cdot i^3 = -i$ (96 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3)

$i^{106} = i^{104} \cdot i^2 = (1) \cdot i^2 = -1$ (106 หารด้วย 4 เหลือเศษ 2)

$$i^{2021} = i^{2020}\cdot i = (1)\cdot i = i$$ (2021 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1)

$$i^{2563} = i^{2560}\cdot i^{3} = (1)\cdot i^{3} = -i$$ (2563 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3)

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\dfrac{i^{77}+i^{88}+i^{99}+i^{100}}{i^{12}+i^{25}+i^{35}+i^{176}}$

วิธีทำ จาก $\dfrac{i^{77}+i^{88}+i^{99}+i^{100}}{i^{12}+i^{25}+i^{35}+i^{176}} = \dfrac{i+1+(-i)+1}{1+i+(-i)+1} = 1$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $\sum\limits_{k=1}^{1000}\left(\dfrac{k}{i^{k}}\right)$

วิธีทำ จาก $\sum\limits_{k=1}^{1000}\left(\dfrac{k}{i^{k}}\right)$

จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{1000}\left(\frac{k}{i^{k}}\right) = \frac{1}{i}+\frac{2}{i^{2}}+\frac{3}{i^{3}}+\dots+\frac{1000}{i^{1000}}$$

$$= \frac{1}{i}+\frac{2}{-1}+\frac{3}{-i}+\dots+\frac{1000}{1}$$

$$= \left(\frac{1}{i}+\frac{5}{i}+\frac{9}{i}+\dots+\frac{97}{i}\right)+\left(\frac{2}{-1}+\frac{6}{-1}+\frac{10}{-1}+\dots+\frac{98}{-1}\right)$$

$$+\left(\frac{3}{-i}+\frac{7}{-i}+\frac{11}{-i}+\dots+\frac{99}{-i}\right)+\left(\frac{4}{1}+\frac{8}{1}+\frac{12}{1}+\dots+\frac{100}{1}\right)$$

$$= \left[\left(\frac{1}{i}+\frac{5}{i}+\frac{9}{i}+\dots+\frac{97}{i}\right)-\left(\frac{3}{i}+\frac{7}{i}+\frac{11}{i}+\dots+\frac{99}{i}\right)\right]$$

$$+\left[-\left(\frac{2}{1}+\frac{6}{1}+\frac{10}{1}+\dots+\frac{98}{1}\right)+\left(\frac{4}{1}+\frac{8}{1}+\frac{12}{1}+\dots+\frac{100}{1}\right)\right]$$

$$= \underbrace{\left(\frac{-2}{i}+\frac{-2}{i}+\frac{-2}{i}+\dots+\frac{-2}{i}\right)}_{25\ \text{จำนวน}}-\underbrace{\left(2+2+2+\dots+2\right)}_{25\ \text{จำนวน}}$$

$$= \frac{-50}{i}-50$$

$$= \frac{-50i}{i^{2}}-50$$

$$= 50i-50 = -50+50i$$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงเขียนจำนวนจินตภาพต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปหนึ่งหน่วยจินตภาพ

   1) $\sqrt{-7}$ = ...
   2) $\sqrt{-8}$ = ...
   3) $\sqrt{-32}$ = ...
   4) $\sqrt{-36}$ = ...
   5) $\sqrt{-48}$ = ...

2. จงหาค่าของ

   1. i^{10} = ...
   2. i^{19} = ...
   3. i^{50} = ...
   4. i^{104} = ...
   5. i^{2125} = ...

3. จงหาค่าของ

   1) $i + i^2 + i^3 + ... + i^{100}$

   ....

   ....

   2) $i^{100} + i^{101} + i^{102} + ... + i^{202}$

   ....

   ....

   3) $i^{106} + i^{309} + i^{155} + i^{500}$

   ....

   ....

   4) $(-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + ... + (-i)^{1982}$

   ....

   ....

   5) $i + i^3 + i^5 + ... + i^{729}$

   ....

   ....

   6) $i - i^3 + i^5 - i^7 + i^9 .... + i^{37} - i^{39}$

   ....

   ....

   7) $i^3 + i^4 + i^5 + ... + i^{200}$

....

....

8) $i^2 - i^4 + i^6 - i^8 + i^{10} \ldots\ldots + i^{98} - i^{100}$

....

....

9) $i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots + i^{2565}$

....

....

10) $i^6 + i^8 + i^{10} + \ldots\ldots + i^{276}$

....

....

11) $\left(\frac{1}{i}\right) + \left(\frac{1}{i}\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{i}\right)^{74}$

....

....

12) $\sum_{k=1}^{500} \left(ki^k\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....