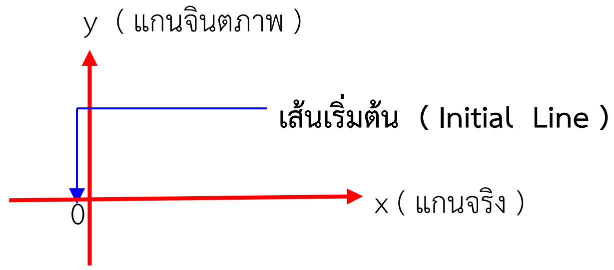
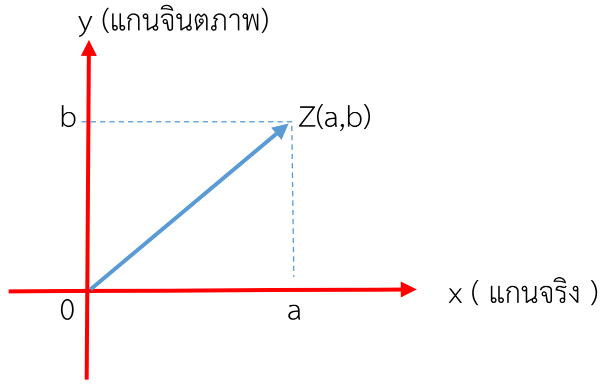
1.5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Polar Form of Complex Numbers)

ข้อกำหนด กำหนดให้มุมใด ๆ จะเป็นมุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน จะต้องประกอบด้วยเงื่อนไขต่อไปนี้

1) แกน x ที่เป็นบวกของระนาบเชิงซ้อน เรียกว่า **เส้นเริ่มต้น (Initial Line)**



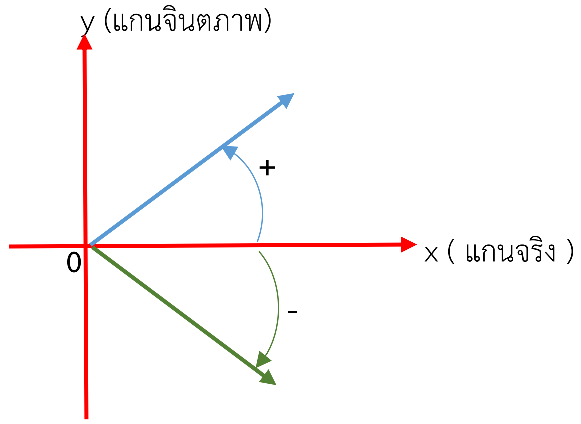
2) ถ้า $z = a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว สามารถเขียนแทน z ด้วยเวกเตอร์ระนาบเชิงซ้อนได้ ดังนี้



3) การวัดค่ามุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานของ z ให้เริ่มวัดออกจากเส้นเริ่มต้น (Initial Line) ไปสิ้นสุดยัง z

ถ้าวัดมุมไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา **ค่าของมุมจะเป็นบวก**

ถ้าวัดมุมไปในทิศตามเข็มนาฬิกา **ค่าของมุมจะเป็นลบ**



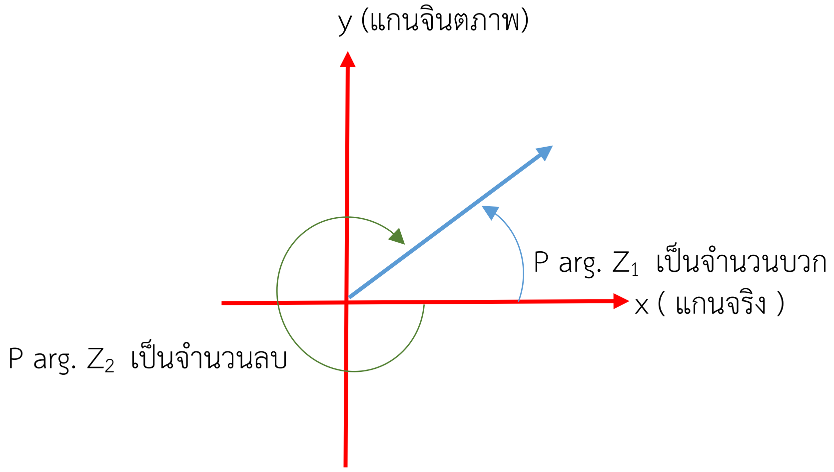
4) ค่ามุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานของ z ที่วัดได้ ให้ถือว่าเป็นค่ามุมประจำตำแหน่งของ z

5) ค่ามุมที่เริ่มวัดออกจากเส้นเริ่มต้น (Initial Line) ไปสิ้นสุดยัง z ครั้งแรก โดยไม่เลยผ่าน เรียกว่า ค่ามุมหลักของ z (Principal argument of z) และเขียนแทนด้วย P arg (z) หรือ P arg z

6) เซตของค่ามุมประจำตัวทั้งหมดของ z เรียกว่า **อาร์กิวเมนต์ทั่วไปของ z** (General argument of z) และเขียนแทนด้วย arg (z) หรือ arg.z

จากข้อกำหนดทำให้ทราบว่า

1) ค่ามุมหลักของ z จะต้องมี 2 ค่าเสมอ ดังรูป



2) เนื่องจากข้อกำหนดไม่ได้บอกว่าการวัดค่ามุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานของ z จะต้องสิ้นสุดอย่างไร แสดงว่าค่ามุมที่เริ่มวัดจากเส้นเริ่มต้นไปสิ้นสุดยัง z อาจจะสิ้นสุดในครั้งแรกโดยไม่เลยผ่าน หรือเลยผ่านไปกี่รอบก็ได้แล้วสิ้นสุดที่ z

แสดงว่า ค่ามุมประจำหลักของ z จะมีค่ามุมได้มากมาย ดังนี้

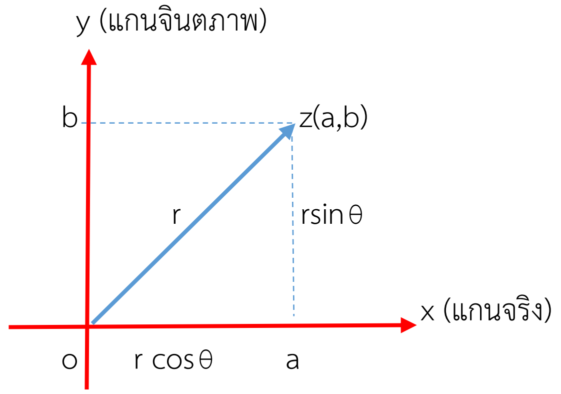
$$\arg.z = 2k\pi + P\arg.z_1 \quad \text{เมื่อ} \quad k \in I$$

หรือ

$$\arg.z = 2k\pi + P\arg.z_2 \quad \text{เมื่อ} \quad k \in I$$

การเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อน $z = a+bi$ ไปเป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ถ้า $z = a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วสามารถเขียนแทน z ด้วย เวกเตอร์ระนาบเชิงซ้อนได้ ดังนี้



จากรูป $\overrightarrow{OZ}$ คือ เวกเตอร์จำนวนเชิงซ้อน $z = a+bi$

จะได้ $r = |z|$

$= \sqrt{a^2+b^2}$

จาก $\arg z = 2k\pi + P\arg z$ เมื่อ $n \in I$

ถ้าให้ $\theta = \arg z$ และ $P = P\arg z$ แล้ว

$\theta = 2n\pi + P$ เมื่อ $n \in I$

หา θ ได้จาก $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

จาก $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ จะได้ $a = r\cos\theta$

จาก $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$ จะได้ $b = r\sin\theta$

ดังนั้น $z = a+bi = r\cos\theta + r\sin\theta \bullet i$

จะได้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $z = a+bi$ สามารถเขียนในรูปเชิงขั้วได้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

สรุป

จำนวนเชิงซ้อน $z = a+bi$ เขียนให้อยู่ในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

เมื่อ $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

และ $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

ตัวอย่าง 1 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $Z = -3$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $Z = -3$ จะได้ $r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

และ $\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{0}{-3} = 0$ จะได้ $\theta = \pi$

ดังนั้น $Z = -3 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 3(\cos\pi + i\sin\pi)$

ตัวอย่าง 2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $Z = 5i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $Z = 5i$ จะได้ $r = |z| = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$

และ $\tan\theta = \dfrac{5}{0} =$ หาค่าไม่ได้ จะได้ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

ดังนั้น $Z = 5i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 5(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$

ตัวอย่าง 3 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $Z = 2 + 2i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $Z = 2 + 2i$ จะได้ $r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

และ $\tan\theta = \dfrac{2}{2} = 1$ จะได้ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

ดังนั้น $Z = 2 + 2i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$

ตัวอย่าง 4 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $Z = -1 + \sqrt{3}\,i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $Z = -1 + \sqrt{3}\,i$ จะได้ $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

และ $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ จะได้ $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

ดังนั้น $Z = -1 + \sqrt{3}\,i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$

ตัวอย่าง 5 จงหาค่า **r** และ θ เมื่อกำหนด $r(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \sqrt{3} + i$ และ $0 \le \theta \le 2\pi$

วิธีทำ จาก $r(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \sqrt{3} + i$ จะได้

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

และ $\tan 2\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ จะได้ $2\theta = \dfrac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

1.5.2 การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

บทนิยาม ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

โดยที่ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

แล้ว $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

และ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ เมื่อ $z_2 \ne 0$

ตัวอย่าง 6 ถ้า $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ และ $z_2 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ แล้ว จงหา $z_1 z_2$ ในรูปของ $a + bi$

วิธีทำ จาก $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ และ $z_2 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

จะได้

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 3(4)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 12\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] \\ &= 12(0 + (1)i) \\ &= 12i \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7 ถ้า $z_1 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ และ $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

แล้ว จงหา $\frac{z_1}{z_2}$ ในรูปของ $a + bi$

วิธีทำ จาก $z_1 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ และ $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

จะได้ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$\frac{z_1}{z_2} = 4\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 4\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= 2 + 2\sqrt{3}i$$

แบบฝึกหัด 1.5 ก

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

1) $1+\sqrt{3}\,i$

2) $1-i$

3) $-2\sqrt{3}+2i$

4) $-4-4i$

5) $12-12\sqrt{3}\,i$

6) $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

2. จงหาค่าของ **r** และ θ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้สมการในข้อต่อไปนี้เป็นจริง

   1) $r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{3} - i$ เมื่อ $2\pi \le \theta < 6\pi$

....

....

....

....

   2) $r(\cos\theta + i\sin\theta) = -1 - i$ เมื่อ $6\pi \le \theta < 7\pi$

....

....

....

....

3. ถ้า $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ และ $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ แล้ว จงหา

   1) $z_1 z_2$

....

....

....

....

....

   2) $\frac{z_1}{z_2}$

....

....

....

....

....

5. ถ้า $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ และ $z_2 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ แล้ว จงหา

   1) $z_1 z_2$

....

....

....

....

....

2) $\dfrac{z_1}{z_2}$

....

....

....

....

....

1.5.3 การยกกำลังของจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ (De Moiver's Theorem)

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ตัวอย่าง 8 ถ้า $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ จงหา z^7

วิธีทำ จาก $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

จะได้
$$\begin{aligned}
z^7 &= 2^7\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right) \\
&= 128\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= 128\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 128\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= 64 + 64\sqrt{3}\,i
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 9 ถ้า $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ จงหา z^{10}

วิธีทำ จาก $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

จะได้

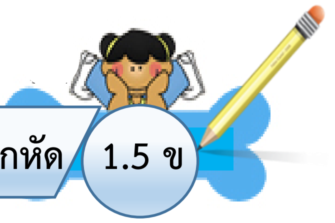
$$\begin{aligned} z^{10} &= 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{5} + i\sin\frac{10\pi}{5}\right) \\ &= 1{,}024(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) \\ &= 1{,}024(1 + (0)i) \\ &= 1{,}024 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 10 ถ้า $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ จงหา z^{10}

วิธีทำ จาก $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

จะได้

$$\begin{aligned} z^{10} &= 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{5} + i\sin\frac{10\pi}{5}\right) \\ &= 1{,}024(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) \\ &= 1{,}024(1 + (0)i) \\ &= 1{,}024 \end{aligned}$$



แบบฝึกหัด 1.5 ข

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนในข้อต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ เมื่อ $a, b \in R$

1) $\dfrac{-3}{1+\sqrt{3}\,i}$

2) $\dfrac{i}{-3-3i}$

3) $(\sqrt{3} - i)^7$

4) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)^5$

5) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{100}$

6) $(-i)^7$

7) $(4+4i)i$

8) $(-2+2\sqrt{3}i)(3-3\sqrt{3}i)$

....

9) $\dfrac{(1-i)^6}{(-1-i)^4}$

10) $(-\sqrt{3}+i)^3(2\sqrt{3}+2i)^5$

....