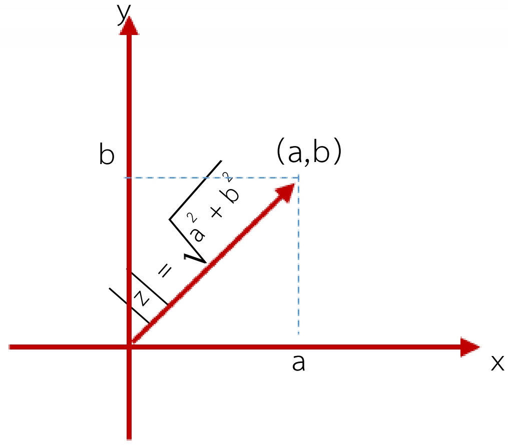
1.4 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

(Absolute value or Modulus of Complex Numbers)

บทนิยาม

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = (a,b) = a+bi$ คือระยะทางจากจุด $(0,0)$ ไปยังจุด (a,b) เขียนแทนด้วย $\left|z\right| = \left|a+bi\right| = \left|(a,b)\right|$



จากรูปจะได้ $\quad \left|z\right| = \left|a+bi\right| = \left|(a,b)\right| = \sqrt{a^2+b^2}$

นั่นคือ $|z| \geq 0$ เสมอ

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

กำหนดให้ z, z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ a, b เป็นจำนวนจริง

1) ถ้า $z = a+bi$ แล้ว $\left|z\right| = \left|a+bi\right| = \sqrt{a^2+b^2}$

ดังนั้น $|z| = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2}$

2) เนื่องจาก $(a+bi)\overline{(a+bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$

หรือ $z\bar{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

ดังนั้น $\left|z\bar{z}\right|$ หรือ $\left|z\right|^2 = z\bar{z}$

3) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

4) ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

5) $\left|z_1 z_2\right| = \left|z_1\right|\left|z_2\right|$

6) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

7) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

8) $|z^n| = |z|^n$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ

1) $|3-4i|$ 2) $|1-i|$ 3) $|-12+5i|$

วิธีทำ

1) $|3-4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

2) $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

3) $|-12+5i| = \sqrt{(-12)^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $|(1+i)^{10}|$

วิธีทำ จาก $|z^n| = |z|^n$ ดังนั้น $|(1+i)^{10}| = |1+i|^{10} = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^{10}$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{10} = 2^5 = 32$$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\left|\dfrac{(4+3i)^5(3+4i)^3}{(3-4i)^2(-4-3i)^4}\right|$

วิธีทำ จาก $|z^n| = |z|^n$ และ $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

ดังนั้น
$$\left|\frac{(4+3i)^5(3+4i)^3}{(3-4i)^2(-4-3i)^4}\right| = \frac{|(4+3i)^5||(3+4i)^3|}{|(3-4i)^2||(-4-3i)^4|}$$

$$= \frac{|4+3i|^5\,|3+4i|^3}{|3-4i|^2\,|-4-3i|^4}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{4^2+3^2}\right)^5\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^3}{\left(\sqrt{3^2+(-4)^2}\right)^2\left(\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}\right)^4}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{25}\right)^5\left(\sqrt{25}\right)^3}{\left(\sqrt{25}\right)^2\left(\sqrt{25}\right)^4}$$

$$= \frac{5^5\ 5^3}{5^2\ 5^4}$$

$$= \frac{5^8}{5^6}$$

$$= 5^2$$

$$= 25$$

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ $a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $(3+4i)(a+bi)(-12-5i) = 2-4i$ จงหาค่าของ $\left|a+bi\right|$

วิธีทำ จาก $(3+4i)(a+bi)(-12-5i) = 2-4i$

จะได้ $$a+bi = \frac{2-4i}{(3+4i)(-12-5i)}$$

ดังนั้น
$$\left|a+bi\right| = \frac{\left|2-4i\right|}{\left|(3+4i)(-12-5i)\right|}$$

$$= \frac{\sqrt{2^2+(-4)^2}}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{9+16}\sqrt{144+25}}$$

$$= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}\sqrt{169}}$$

$$= \frac{\sqrt{20}}{5(13)}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{65}$$

ตัวอย่าง 5 จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน z จากสมการ $z^2 = \dfrac{2+i}{2-i} + \dfrac{3+4i}{1+2i}$

วิธีทำ จาก

$$z^2 = \frac{2+i}{2-i} + \frac{3+4i}{1+2i}$$

$$= \frac{(2+i)(1+2i)}{(2-i)(1+2i)} + \frac{(3+4i)(2-i)}{(1+2i)(2-i)}$$

$$= \frac{(2+i)(1+2i) + (3+4i)(2-i)}{(2-i)(1+2i)}$$

$$= \frac{(2+4i+i-2) + (6-3i+8i+4)}{(2-i)(1+2i)}$$

$$= \frac{10+10i}{(2-i)(1+2i)}$$

ดังนั้น

$$\left|z^2\right| = \left|\frac{10+10i}{(2-i)(1+2i)}\right|$$

$$\left|z\right|^2 = \frac{\left|10+10i\right|}{\left|2-i\right|\left|1+2i\right|}$$

$$= \frac{\sqrt{10^2+10^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\,\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{100+100}}{\sqrt{4+1}\,\sqrt{1+4}}$$

$$= \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}}$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{5}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

ตัวอย่าง 6 ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

จงแสดงว่า $\left|z_1 - z_2\right|^2 + \left|z_1 + z_2\right|^2 = 2\left|z_1\right|^2 + 2\left|z_2\right|^2$

วิธีทำ ให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$

จะได้ $z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$ และ $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$

ดังนั้น $\left|z_1 - z_2\right|^2 + \left|z_1 + z_2\right|^2 = \left|(a-c) + (b-d)i\right|^2 + \left|(a+c) + (b+d)i\right|^2$

$$= \left(\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}\right)^2$$

$$= (a-c)^2 + (b-d)^2 + (a+c)^2 + (b+d)^2$$

$$= a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 + a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$$

$$= 2(a^2 + b^2) + 2(c^2 + d^2)$$

$$= 2\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{c^2 + d^2}\right)^2$$

$$= 2\left|a + bi\right|^2 + 2\left|c + di\right|^2$$

$$= 2\left|z_1\right|^2 + 2\left|z_2\right|^2$$

ตัวอย่าง 7 จงตรวจสอบว่า $\left|z - 3 + 2i\right| = 5$ เป็นสมการของกราฟชนิดใด

วิธีทำ ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

จะได้ $z - 3 + 2i = a + bi - 3 + 2i$

$$= (a-3) + (b+2)i$$

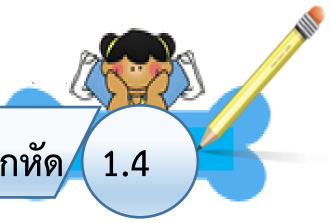
ดังนั้น $\left|z - 3 + 2i\right| = \left|(a-3) + (b+2)i\right|$

$$= \sqrt{(a-3)^2 + (b+2)^2}$$

จาก $\left|z - 3 + 2i\right| = 5$ ดังนั้น $\sqrt{(a-3)^2 + (b+2)^2} = 5$

จะได้ว่า $(a-3)^2 + (b+2)^2 = 25$ เป็นกราฟของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-3, 2)$ รัศมี 5 หน่วย

ดังนั้น $\left| z-3+2i \right| = 5$ เป็นสมการของกราฟวงกลม



แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

   1) $1-\sqrt{3}\,i$ = ... 2) $\sqrt{2}-3i$ = ...

   3) $4+3i$ = ... 4) $-5+12\,i$ = ...

   5) $\sqrt{5}+2\sqrt{3}\,i$ = ... 6) $-\sqrt{3}-i$ = ...

   7) $-3-4i$ = ... 8) $4i$ = ...

2. ถ้า $(a+bi)(-3-4i)^3 = (-4+3i)^5$ จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $\overline{a+bi}$

....

....

....

....

....

....

3. ถ้า z คือจำนวนเชิงซ้อนที่มี $\left| z \right| = 5$ และ $\bar{z} = a-4i$ จงหาค่าของ z

....

....

....

....

....

....

4. จงหาค่าของ $\left| (2+3i)^2(1-4i)^2 \right|$

....

....

....

....

....

5. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $z \neq 0$ และ $(5-12i)z^3(-3+4i) = 130\bar{z}$ จงหา $\left| \bar{z} \right|$

....

....

....
....
....

6. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $\left|z\right| = \left|3-4i\right|$ และ $\left|z-1\right| = \sqrt{30}$ แล้ว จงหาเซตของ

ส่วนจินตภาพของ z

....
....
....
....
....
....
....

7. ถ้า $z = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ แล้วจงหาค่าของ $\left|z^2 - z + \dfrac{1}{4}\right|$

....
....
....
....
....
....
....

8. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า $\left|z\right| = \sqrt{z\bar{z}}$

....
....
....
....
....
....
....

9. จงแสดงว่า $\left|1+zi\right| = \left|1-zi\right|$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง

....
....
....
....

....
....
....
....

10. จงตรวจสอบว่า $|3z+i| = |z+3i|$ เป็นสมการของกราฟชนิดใด

....
....
....
....
....
....
....
....

11. จงตรวจสอบว่า $|z-3+2i| = |z-1-3i|$ เป็นสมการของกราฟชนิดใด

....
....
....
....
....
....
....
....

12. จงตรวจสอบว่า $z+\bar{z} = 2$ เป็นสมการของกราฟชนิดใด

....
....
....
....
....
....
....
....

13. จงตรวจสอบว่า $z-\bar{z} = i$ เป็นสมการของกราฟชนิดใด

....
....
....
....

....

....

....

....