

## 1.7 สมการพหุนาม ( Polynomial Equations )

### ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต ( Fundamental of Algebra )

ถ้า  $p(x)$  เป็นพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าศูนย์แล้ว สมการ  $p(x) = 0$  จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ

### ทฤษฎีบท

ถ้า  $p(x)$  เป็นพหุนามที่มีดีกรี  $n \geq 1$  แล้วสมการ  $p(x) = 0$  จะมีคำตอบทั้งหมด  $n$  คำตอบ ( นับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย )

### ทฤษฎีบทตัวประกอบ ( Factor Theorem )

กำหนด  $p(x)$  เป็นพหุนามที่มีดีกรี  $n \geq 1$  จะได้ว่า  $x - c$  เป็นตัวประกอบของ  $p(x)$  ก็ต่อเมื่อ  $p(c) = 0$

### ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ

กำหนด  $p(x)$  เป็นพหุนามที่อยู่ในรูป

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

โดยที่  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง  $a_n \neq 0$

ถ้า  $x - \frac{k}{m}$  เป็นตัวประกอบของพหุนาม  $p(x)$  โดยที่  $m$  และ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

ซึ่ง  $m \neq 0$  และ ห.ร.ม. ของ  $m$  และ  $k$  คือ 1 แล้ว  $m$  หาร  $a_n$  ลงตัว และ  $k$  หาร  $a_0$  ลงตัว

### ทฤษฎีบท

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน  $z$  เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

โดยที่สัมประสิทธิ์  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  เป็นจำนวนจริงแล้ว สังยุค  $\bar{z}$  จะเป็นคำตอบของสมการพหุนามนี้ด้วย

ตัวอย่าง 1

จงหาเซตคำตอบของสมการ  $x^2 + 2x + 8 = 0$ 

วิธีทำ

จาก  $x^2 + 2x + 8 = 0$  สามารถหาคำตอบของสมการโดยใช้สูตร

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} \\
 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 32}}{2} \\
 &= \frac{-2 \pm \sqrt{28}i}{2} \\
 &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}i}{2} \\
 &= -1 \pm \sqrt{7}i
 \end{aligned}$$

จะได้

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ คือ  $\{-1 + \sqrt{7}i, -1 - \sqrt{7}i\}$ 

ตัวอย่าง 2

จงหาเซตคำตอบของสมการ  $x^2 - ix + 2 = 0$ 

วิธีทำ

จาก  $x^2 - ix + 2 = 0$  สามารถหาคำตอบของสมการโดยใช้สูตร

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{i \pm \sqrt{i^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\
 &= \frac{i \pm \sqrt{-1 - 8}}{2} \\
 &= \frac{i \pm 3i}{2} \\
 &= 2i, -i
 \end{aligned}$$

จะได้

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ คือ  $\{2i, -i\}$

**ตัวอย่าง 3** → จงหาเซตของคำตอบของสมการ  $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

**วิธีทำ** จาก  $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad x^3 - 2x^2 - 9x + 18 &= (x^3 - 2x^2) - (9x - 18) \\ &= x^2(x-2) - 9(x-2) \\ &= (x^2 - 9)(x-2) \\ &= (x+3)(x-3)(x-2) \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 \text{ จะได้ } (x+3)(x-3)(x-2) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x = -3, 2, 3$$

เซตคำตอบของสมการ คือ  $\{-3, 2, 3\}$

**ตัวอย่าง 4** → จงหาเซตของคำตอบของสมการ  $x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = 0$

**วิธีทำ** จาก  $x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = 0$  ตรวจสอบการหารลงตัว

ถ้า  $p(x)$  เป็นพหุนามที่มีดีกรี  $n \geq 1$  จะได้ว่า  $x-c$  เป็นตัวประกอบของ  $p(x)$  ก็ต่อเมื่อ  $p(c) = 0$

$$\text{ให้ } p(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 6 \text{ จะเห็นว่า } p(1) = 1^3 - 2(1)^2 + 7(1) - 6 = 0$$

ดังนั้น  $x-1$  เป็นตัวประกอบของ  $p(x)$

$$\therefore (x-1)(x^2 - x + 6) = 0 \text{ จะได้ } x-1 = 0 \text{ และ } x^2 - x + 6 = 0$$

$$\begin{aligned} x = 1 \text{ และ } x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(6)}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{เซตคำตอบของสมการ คือ } \left\{ 1, \frac{1 + \sqrt{23}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{23}i}{2} \right\}$$

**ตัวอย่าง 5** → จงหาเซตของคำตอบของสมการ  $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

**วิธีทำ** ให้  $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$  จะเห็นว่า

$$p(1) = 1^4 - 2(1)^3 + 2(1)^2 - 2(1) + 1 = 0$$

ดังนั้น  $x-1$  เป็นตัวประกอบของ  $p(x)$

$$\begin{aligned}\therefore x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 &= (x-1)(x^3 - x^2 + x - 1) \\ &= (x-1)(x-1)(x^2 + 1) \\ &= (x-1)(x-1)(x+i)(x-i)\end{aligned}$$

จะได้  $x-1 = 0$  และ  $x+i = 0$  และ  $x-i = 0$

$$x = 1 \text{ และ } x = i \text{ และ } x = -i$$

$\therefore$  เซตคำตอบของสมการ คือ  $\{1, i, -i\}$

**ตัวอย่าง 6** จงหาสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมี  $3, -4$  และ  $3+i$  เป็นคำตอบ

**วิธีทำ** จาก พหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมี  $3, -4$  และ  $3+i$  เป็นคำตอบ และ ถ้าจำนวนเชิงซ้อน  $z$  เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

โดยที่สัมประสิทธิ์  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  เป็นจำนวนจริงแล้ว สังเกต  $\bar{z}$  จะเป็นคำตอบของสมการพหุนามนี้ด้วย

แสดงว่ามี  $3-i$  เป็นคำตอบของสมการด้วย

ดังนั้น สมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมี  $3, -4, 3+i$  และ  $3-i$  เป็นคำตอบ คือ  $(x-3)(x+4)(x-3-i)(x-3+i) = 0$

$$(x^2 + x - 12)(x-3)^2 - i^2 = 0$$

$$(x^2 + x - 12)(x^2 - 6x + 9 + 1) = 0$$

$$(x^2 + x - 12)(x^2 - 6x + 10) = 0$$

$$x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 6x + x^3 - 6x^2 + 10x - 12x^2 + 72x - 120 = 0$$

$$x^4 - 5x^3 - 28x^2 + 76x - 120 = 0$$



## แบบฝึกหัด 1.7

1. จงหาเซตของคำตอบของสมการในข้อต่อไปนี้

$$1) \quad 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

.....

.....

.....

.....

$$2) \quad 2x^3 - x + 1 = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$3) \quad x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 9x - 18 = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$4) \quad x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 22x + 12 = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$5) \quad x^4 - 6x^2 - 40 = 0$$

$$6) \quad x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 26x^2 - 17x - 42 = 0$$

2. จงแสดงว่า  $-1 + \sqrt{3}i$  เป็นคำตอบของสมการพหุนาม  $x^5 + 9x^3 - 8x^2 - 72 = 0$

3. จงหาสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมี  $3$ ,  $-4$  และ  $3 + i$  เป็นคำตอบ

4. จงหาสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมี  $2-2\sqrt{3}i$  และ  $-4i$  เป็นคำตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. จงหาสมการพหุนามดีกรี 5 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมี  $-\frac{2}{3}$ ,  $-1+i$  และ  $3+\sqrt{3}i$  เป็นคำตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. จงแสดงว่าสมการพหุนาม  $x^2 - x + (i+1) = 0$  มี  $i$  เป็นคำตอบ แต่  $-i$  ไม่ใช่คำตอบ พร้อมทั้งอธิบายด้วยว่า ผลนี้ขัดกับทฤษฎีที่กล่าวไว้หรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. จงหาสมการพหุนามดีกรี 3  $P(x) = 0$  ที่สอดคล้องเงื่อนไขแต่ละข้อต่อไปนี้

1)  $-3, -1, 4$  เป็นคำตอบ และ  $P(2) = 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2)  $2, 5, -3$  เป็นคำตอบ และ  $P(1) = -4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. จงหาพหุนามดีกรีต่ำสุดเท่าที่จะเป็นไปได้ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

1)  $-3, 2$  และ  $i$  เป็นคำตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2)  $6$  และ  $-2$  เป็นคำตอบ

.....



3)  $2i$  และ  $5$  เป็นคำตอบซ้ำ 1 ครั้ง และ 2 ครั้ง ตามลำดับ

4)  $-3$  และ  $1+2i$  เป็นคำตอบซ้ำ 2 ครั้ง ทั้งสองคำตอบ

9. จงแสดงว่า  $-2$  เป็นคำตอบซ้ำ 2 ครั้งของสมการพหุนาม  $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 28x + 52 = 0$

พร้อมทั้งหาคำตอบที่เหลือทั้งหมดของสมการพหุนามนี้

10. จงแสดงว่า  $-1$  เป็นคำตอบซ้ำ 3 ครั้ง ของสมการพหุนาม

