1.6 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน (The n^{th} Roots of Complex Numbers)

1.6.1 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน (Square Roots of Complex Numbers)

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ รากที่สองของ z คือ จำนวนเชิงซ้อน w ซึ่ง $w^2 = z$

ข้อสังเกต ถ้า w เป็นรากที่สองของ z แล้ว $-w$ จะเป็นรากที่สองของ z ด้วย และรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์ จะมีเพียงสองจำนวนเท่านั้น

ถ้า $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ x และ y เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน และ $w = a + bi$ จะได้

1) ถ้า $y \geq 0$ รากที่สองของ z คือ

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\,i \quad \text{กับ} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\,i$$

2) ถ้า $y < 0$ รากที่สองของ z คือ

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\,i \quad \text{กับ} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\,i$$

เนื่องจาก รากที่สองของ z มีเพียงสองจำนวนเท่านั้น จึงต้องเลือกเครื่องหมายของ a และ b ให้ถูกต้อง

ทฤษฎีบท กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ และให้

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ จะได้ รากที่สองของ z คือ

$$\begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} + \sqrt{\frac{r-x}{2}}\,i\right) & \text{เมื่อ } y \geq 0 \\ \pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} - \sqrt{\frac{r-x}{2}}\,i\right) & \text{เมื่อ } y < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 1 จงหารากที่สองของ $-7-24i$

วิธีทำ ให้ $z = -7-24i$

จะได้ $r = |z| = \sqrt{(-7)^2+(-24)^2} = \sqrt{625} = 25$

$\therefore$ รากที่สองของ z คือ $\pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} - \sqrt{\frac{r-x}{2}}\,i\right)$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{25+(-7)}{2}} - \sqrt{\frac{25-(-7)}{2}}\,i\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} - \sqrt{\frac{32}{2}}\,i\right)$$

$$= \pm(3-4i)$$

รากที่สองของ $-7-24i$ คือ $3-4i$ หรือ $-3+4i$

ตัวอย่าง 2 จงหารากที่สองของ $5+12i$

วิธีทำ ให้ $z = 5+12i$

จะได้ $r = |z| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$

$\therefore$ รากที่สองของ z คือ $\pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} + \sqrt{\frac{r-x}{2}}\,i\right)$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{13+5}{2}} + \sqrt{\frac{13-5}{2}}\,i\right)$$

$$= (3+2i)$$

รากที่สองของ $5+12i$ คือ $3+2i$ หรือ $-3-2i$

1.6.2 สมการของพหุนามกำลังสอง

สมการพหุนามกำลังสอง คือสมการที่อยู่ในรูป $ax^2+bx+c=0$ เมื่อ a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ ซึ่งการแก้สมการอาจอาศัยการแยกตัวประกอบของพหุนามหรือใช้สูตร ดังนี้

ถ้า $ax^2+bx+c=0$ เมื่อ a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ แล้ว

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ซึ่งถ้า $b^2-4ac=0$ คำตอบของสมการเป็นจำนวนจริง 1 จำนวน

$b^2-4ac>0$ คำตอบของสมการเป็นจำนวนจริง 2 จำนวน

$b^2-4ac<0$ คำตอบของสมการเป็นจำนวนเ.ซิงซ้อน 2 จำนวน

ตัวอย่าง 3 จงหาคำตอบของสมการพหุนาม $2x^2-3x+6=0$

วิธีทำ จาก $2x^2-3x+6=0$ หาคำตอบของสมการโดยใช้สูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2-4(2)(6)}}{2(2)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9-48}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-39}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{39}\ i}{4}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $\frac{3+\sqrt{39}\ i}{4}$ และ $\frac{3-\sqrt{39}\ i}{4}$

1. จงหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1) $-16i$

2) $\sqrt{3}+i$

3) $3+4i$

4) $8-6i$

5) $1-2\sqrt{2}\,i$

2. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $x^2 = -4$

.....
.....
.....
.....
.....

2) $x^2 + 48 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

3) $x^2 + 2x + 40 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

4) $2x^2 + 2x + 25 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

5) $x^2 + x + 6 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

6) $4x^2 + 3x + 10 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

7) $2x^2 + 5x + 12 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

8) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

9) $x^2 - 2x + 8 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

10) $x^2 - 2x - 1 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....

11) $x^2 - 4x + 5 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

12) $x^2 - x - 6 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

13) $3x^2 + 5x - 16 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

14) $2x^2 + 2x + 4 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

15) $4x^2 + 2x + 1 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

16) $3x^2 + 6x + 5 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

1.6.3 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน (The n^{th} Roots of Complex Numbers)

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ รากที่ n ของ z คือ จำนวนเชิงซ้อน w ซึ่ง $w^n = z$

ให้ w เป็นรากที่ n ของ z และ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วรากที่ n ของ z ที่แตกต่างกันทั้งหมด คือ

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi + \theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ตัวอย่าง 4 จงหารากที่สามของ $27i$

วิธีทำ ให้ $z = 27i = 27\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

จะได้ รากที่สามของ z คือ $\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right)$

$$= 3\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right)$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2$

$\therefore$ เมื่อ $k = 0$ รากที่สามของ z คือ $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

เมื่อ $k = 1$ รากที่สามของ z คือ $3\left(\cos\frac{2\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{2\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right)$

$$= 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= 3\left(\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{6})\right)$$

$$= 3\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

เมื่อ $k = 2$ รากที่สามของ z คือ $3\left(\cos\frac{4\pi+\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{4\pi+\frac{\pi}{2}}{3}\right)$

$$= 3\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 3(0 - i)$$

$$= -3i$$

ตัวอย่าง 5 จงหารากที่ 2 ของ $\sqrt{3}+i$

วิธีทำ ให้ $z = \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

จะได้ รากที่สองของ z คือ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{2} + i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{2}\right)$

เมื่อ $k = 0, 1$

$\therefore$ เมื่อ $k = 0$ รากที่สองของ z คือ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} \right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \right)$$

$$= \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2+2\sqrt{\frac{3}{4}}} + i\sqrt{2-2\sqrt{\frac{3}{4}}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) + i\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

เมื่อ $k = 1$ รากที่สองของ z คือ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi+\frac{\pi}{6}}{2} + i\sin\frac{2\pi+\frac{\pi}{6}}{2}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2} - i\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

1. จงหารากที่ 3 ของจำนวนจริงต่อไปนี้

1) $8\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

2) $27\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

3) $-8i$

4) $27\,i$

5) $\sqrt{3} - i$

6) $1+\sqrt{3}\,i$

7) $-2\sqrt{3}+2\,i$

8) $2 - 2\sqrt{3}\,i$